

Über die Vorzeichenstruktur der Exponentialsummen

DIETRICH BRAESS

*Westfälische Wilhelms-Universität, Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik
44 Münster, Roxeler Str., West Germany*

Received August 14, 1969

Herrn Professor Dr. Lothar Collatz zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

Für die Familie der Exponentialsummen wird die Struktur untersucht, die sich aus der Klassifikation nach den Vorzeichen bestimmter Faktoren ergibt. Die Vorzeichenklassen sind die Zusammenhangskomponenten bezüglich der Topologien, die für die Tschebyscheff-Approximation von Bedeutung sind. Die Existenz lokal bester Approximationen wird gezeigt, und diese werden durch entsprechende Vorzeichen charakterisiert. Für die Entwicklung von Iterationsverfahren zur Konstruktion bester Approximationen ergeben sich daraus erhebliche Konsequenzen.

EINLEITUNG

Die Bestimmung der Tschebyscheff-Approximierenden bei der Anpassung stetiger Funktionen durch Exponentialsummen stellt ein nichtlineares Minimumproblem dar. Im Gegensatz zur Approximation mit Polynomen und rationalen Funktionen gibt es Fälle, in denen mehrere beste Approximationen, d.h. mehrere globale Minima existieren [1]. Indem wir in dieser Arbeit die Struktur der Exponentialsummen weiter untersuchen, zeigen wir, daß im allgemeinen mehrere lokale Minima mit verschiedener Vorzeichenstruktur existieren. Die Konsequenzen für die Konstruktion von Minimallösungen mittels Iterationsverfahren diskutieren wir in einer weiteren Arbeit.

Bei der Exponentialapproximation betrachtet man die Summen der Form

$$E(a, x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{\lambda_n x},$$
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N.$$
(8.1)

Eine zentrale Rolle spielen in dieser Arbeit die Vorzeichenverteilungen der Faktoren α_n , wobei die Frequenzen λ_n entsprechend (8.1) anzuordnen sind. Die Vorzeichen definieren eine Klasseneinteilung für die Menge der

Exponentialsummen mit maximalem Grad. Bekanntlich muß man für die Approximationsaufgabe die Menge der Exponentialsummen (8.1) noch erweitern und abschließen [1,4]. Auch in der erweiterten Familie findet man die Struktur wieder, die sich aus den Vorzeichen ergibt. Sie beschreibt dann sogar die Zusammenhängeverhältnisse in der Familie der Exponentialsummen.

Mit der Untersuchung knüpfen wir direkt an eine frühere Arbeit über Eindeutigkeitsfragen bei der Exponentialapproximation an [1]. Die dort eingeführten Bezeichnungen und Formeln werden auch hier benutzt. Die Abschnitte sind weiternumeriert, und Zitate mit (1.1) bis (7.3) beziehen sich auf Formeln jener Arbeit. Das gleiche gilt für die Sätze 1 bis 6.

9. DARSTELLUNG DER EXPONENTIALSUMMEN DURCH DIFFERENZENQUOTIENTEN

Bei der Exponentialapproximation betrachtet man nicht nur die Summen der Form (8.1) sondern alle Funktionen

$$E(a, x) = \sum_{n=1}^l P_n(x) e^{\lambda_n x}, \quad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{M_n-1} \gamma_{n\nu} x^\nu,$$

mit

$$\sum_{n=1}^l M_n = k \leq N, \tag{9.1}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_l.$$

Diese Normaldarstellung ist jedoch für topologische Untersuchungen nicht sehr geeignet. Denn aus ihr ist z.B. nicht zu erkennen, daß für $\delta \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\delta} [e^{\lambda x} - e^{(\lambda-\delta)x}] \rightarrow x e^{\delta x}$$

strebt und daß für kleine δ die Funktionen $1/\delta(e^{\lambda x} - e^{(\lambda-\delta)x})$ in einer (starken) Umgebung von $x e^{\lambda x}$ liegen. Deshalb wird noch eine andere Darstellung entwickelt.

In der Darstellung (8.1) werden die eigentlichen Exponentialsummen als Linearkombinationen von

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_N x} \tag{9.2}$$

geschrieben. Eine äquivalente Basis bilden die Funktionen

$$\Delta^0(\lambda_1) e^{\lambda_1 x}, \Delta^1(\lambda_1, \lambda_2) e^{\lambda_2 x}, \Delta^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \dots \Delta^{N-1}(\lambda_1 \dots \lambda_N) e^{\lambda_N x}. \tag{9.3}$$

Dabei werden die Differenzenquotienten für Funktionen von λ in der üblichen Weise rekursiv definiert [8]

$$\begin{aligned} \Delta^0(\lambda_1)\varphi &= \varphi(\lambda_1) \\ \Delta^v(\lambda_1 \cdots \lambda_{v+1})\varphi &= \frac{\Delta^{v-1}(\lambda_1 \cdots \lambda_v)\varphi - \Delta^{v-1}(\lambda_2 \cdots \lambda_{v+1})\varphi}{\lambda_1 - \lambda_{v+1}} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_{v+1}). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Der Zusammenhang zwischen den Systemen (9.2) und (9.3) wird durch eine nichtsinguläre Dreiecksmatrix vermittelt, woraus die Äquivalenz folgt. Durch (9.4) sind die Differenzenquotienten für paarweise verschiedene Argumente $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{v+1}$ definiert. Von dieser Voraussetzung befreien wir uns, um alle Exponentialsummen—also auch die uneigentlichen—einheitlich in der Gestalt

$$\begin{aligned} E(a, x) &= \sum_{\nu=0}^{N-1} \beta_\nu \Delta^\nu(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{\nu+1}) e^{\lambda x} \\ &\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N \end{aligned} \quad (9.5)$$

darstellen zu können. Wir wählen die Definition (9.6) für ν -mal differenzierbare Funktionen [8]

$$\begin{aligned} \Delta^\nu(\lambda_1 \cdots \lambda_{\nu+1})\varphi &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{\nu-1}} \varphi^{(\nu)}[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 + \cdots + (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)t_\nu] \\ &\times dt_\nu \cdots dt_1. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Aus (9.6) folgt speziell für gleiche Argumente

$$\Delta^\nu(\lambda_1, \lambda_1 \cdots \lambda_1)\varphi = \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(\lambda_1). \quad (9.7)$$

HILFSSATZ 3. Jede Exponentialsumme mit Grad $\leq N$ ist in der Form (9.5) darstellbar. Die Frequenz λ_n ($n = 1, 2 \cdots l$) tritt M_n -mal als Argument in (9.5) auf, wenn in (9.1) der Grad des zugehörigen Polynoms $M_n - 1$ beträgt.

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, daß die Anwendung des Differenzenoperators auf $e^{\lambda x}$ zu Funktionen der Form (9.1) führt und der Grad der Polynome kleiner ist als die Vielfachheit, mit der die zugehörige Frequenz als Argument im Differenzenquotient auftritt.

Für $N = 1$ ist nichts zu beweisen. Die Behauptung sei schon für $N - 1$ bewiesen. Wenn alle Argumente λ_n übereinstimmen, folgt die Behauptung aus (9.7). Sonst ist $\lambda_1 \neq \lambda_N$, und man kann die Rekursionsformel (9.4)

für $\nu = N - 1$ heranziehen. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung erhält man die Behauptung.

Die Exponentialsummen (9.1) mit festen Frequenzen λ_n und vorgegebenen Polynomgraden M_n bilden einen linearen Teilraum der Dimension $\sum_n M_n$. Andererseits genügen die Funktionen

$$\begin{aligned} \zeta_\nu(x) &= \zeta_\nu(x; \lambda_1 \cdots \lambda_N) = \Delta^\nu(\lambda_1 \cdots \lambda_{\nu+1}) e^{\lambda x} \\ &= x^\nu \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{\nu-1}} \exp\{[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_1 \cdots + (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)t_\nu]x\} dt_\nu \cdots dt_1 \end{aligned} \quad (9.8)$$

und die Ableitungen am Nullpunkt den Relationen

$$\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \zeta_\nu(x=0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu < \nu \end{cases} \quad 0 \leq \mu \leq \nu \leq N - 1. \quad (9.9)$$

Die Differenzenquotienten bilden deshalb eine Basis eines N -dimensionalen Raumes. Also werden durch die Linearkombinationen alle Exponentialsummen erfaßt.

Den Exponentialsummen $E[a]$ mit maximalem Grad $k = N$ ist durch (9.5) ein Satz von $2N$ Parametern β_ν, λ_n eindeutig zugeordnet. Ehe wir nachweisen, daß sich in diesen Parametern auch die Topologie von V_N widerspiegelt, bringen wir einen topologischen Satz.

SATZ 8. *Die Mengen beschränkter Exponentialsummen*

$$\{E[a] : E[a] \in V_N, \|E[a]\| \leq M < \infty\} \quad (9.10)$$

sind kompakt bez. der vier folgenden Topologien, und diese sind zueinander äquivalent.

1. *Die Topologie, die durch eine Metrik*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} w(x) \cdot |f(x) - g(x)| \quad (9.11)$$

erzeugt wird. Dabei sei $w(x) \in C(x)$ eine im Innern von X positive Funktion und $w(x)$ verschwinde am Rand von X .

2. *Die Topologie der kompakten Konvergenz im offenen Intervall.*

3. *Die Topologie der punktweisen Konvergenz in einer dichten Teilmenge von X .*

4. *Die Topologie der Konvergenz an $2N$ Punkten des offenen Intervalls.*

Diese Topologien sind in $V_N - V_{N-1}$ mit der durch die Tschebyscheff-Norm erzeugten Topologie äquivalent, und $V_N - V_{N-1}$ ist lokalkompakt.

Beweis. Wie in [5] gezeigt wurde, sind die beschränkten Mengen (9.10) folgenkompakt in der Topologie der kompakten Konvergenz. Da diese Topologie innerhalb der beschränkten Funktionen durch die Metrik (9.11) erzeugt wird, und in metrischen Räumen folgenkompakte Mengen kompakt sind, gilt die Behauptung für die beiden zunächst genannten Topologien. Die beiden anderen Topologien [6] sind separiert, da zwei Exponentialsummen identisch sind, wenn sie nur auf $2N$ Punkten übereinstimmen. Deshalb fallen diese Topologien nach (6) auf S. 19 in [2] mit den stärkeren Topologien zusammen, für die bereits die Kompaktheit bewiesen ist. Da nach [5] aus konvergenten Folgen solche Teilfolgen herausgezogen werden können, die im ganzen Intervall gleichmäßig konvergieren, falls das Grenzelement den Grad $k = N$ hat, ergeben sich die Aussagen für $V_N - V_{N-1}$ unmittelbar.

SATZ 9. In $V_N - V_{N-1}$ ist die Abbildung, die jeder Funktion $E[a]$ die Parameter β_ν, λ_ν zuordnet, eine stetige Abbildung.

Beweis. Sei $E[a^\rho] \in V_N$ eine konvergente Folge. Wenn die Grenzfunktion $E[a]$ in $V_N - V_{N-1}$ enthalten ist, sind nach [5] die Frequenzen λ_ν^ρ beschränkt, und es läßt sich eine Teilfolge mit konvergenten Frequenzen auswählen. Wir nehmen an, wir hätten bereits eine solche Teilfolge gewählt und es sei $\lambda_\nu^* = \lim \lambda_\nu^\rho$. Seien $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ beliebige Punkte des Intervalls. Die Parameter β_ν^ρ der Darstellung (9.5) sind durch die Gleichungen

$$E(a^\rho, x_i) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \beta_\nu^\rho \zeta_\nu(x_i; \lambda_1^\rho, \lambda_2^\rho \dots \lambda_N^\rho) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

bestimmt. Für alle ρ sind die $N \times N$ -Matrizen mit den Elementen $[\zeta_\nu(x_i)]$ nicht singulär, da die Funktionen ζ_ν nach Hilfssatz 3 linear unabhängig sind und die Haarsche Bedingung erfüllt ist. Nach (9.8) sind die Funktionen ζ_ν stetig in allen $N + 1$ Argumenten. In den Matrizen und ebenso in den Inversen konvergieren die Elemente gegen die Werte, die man durch Einsetzen der Grenzfrequenzen λ_ν^* erhält. Zusammen mit der Konvergenz der Funktionswerte $E(a^\rho, x_i)$ folgt daraus die Konvergenz der Faktoren $\beta_\nu^\rho \rightarrow \beta_\nu^*$. Offensichtlich ist die Funktion

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \beta_\nu^* \zeta_\nu(x; \lambda_1^*, \lambda_2^* \dots \lambda_N^*)$$

Grenzelement der Folge, fällt also mit $E[a]$ zusammen. Dies gilt wegen der Eindeutigkeit der Darstellung für jede Folge (also nicht nur für die Teilfolge). Die Abbildung ist folgenstetig. Da $V_n - V_{n-1}$ metrisierbar ist, ist sie stetig.

10. DIE VORZEICHENKLASSEN

Die Exponentialsummen klassifizieren wir nach den Vorzeichen der Koeffizienten. Jeder Exponentialsumme mit Grad k wird ein Vorzeichenvektor zugeordnet, dessen k Komponenten die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Für die eigentlichen Exponentialsummen mit geordneten Frequenzen enthält der Vektor gerade die Vorzeichen der Faktoren $\text{sign } \alpha_n$. Für die verallgemeinerten Summen definieren wir die Vorzeichen rekursiv.

DEFINITION.

(a) Die speziellen Exponentialsummen

$$E(x) = P(x) e^{\lambda x} = \sum_{\nu=0}^{M-1} \gamma_{\nu} x^{\nu} e^{\lambda x}, \quad \gamma_{M-1} \neq 0 \quad (10.1)$$

erhalten das Vorzeichen mit M Komponenten

$$\text{sign}(E) = (-1)^{M-1} \sigma, \dots, \sigma, -\sigma, \sigma$$

mit $\sigma = \text{sign } \gamma_{M-1}$.

(b) Wenn alle Frequenzen von E_1 kleiner als die von E_2 sind, ist

$$\text{sign}(E_1 + E_2) = \text{sign}(E_1), \text{sign}(E_2).$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} (x + 5) e^{-3x} &\rightarrow -, + \\ 4e^x &\rightarrow + \\ -x^2 e^{2x} &\rightarrow -, +, - \end{aligned}$$

Damit wird

$$(x + 5) e^{-3x} + 4e^x - x^2 e^{2x} \rightarrow -, +, +, -, +, -.$$

Diese Definition entspricht genau der Interpretation von Vorzeichen im Hilfssatz 1 in [1].

Bei der Einführung von Vorzeichenklassen in V_N werden auch die Summen einbezogen, deren Grad kleiner als N ist.¹

DEFINITION. Sei s ein Vorzeichenvektor mit N Komponenten. Die Menge $V_N(s)$ enthalte die Exponentialsummen aus V_N , deren Vorzeichen mit s übereinstimmt oder deren Vorzeichen aus s gewonnen werden kann, indem man passende Komponenten von s streicht. Ferner sei

$$V_N^0(s) = V_N(s) \cap V_N^0.$$

¹ Eigentlich wird nur in $V_N - V_{N-1}$ eine Einteilung in disjunkte Klassen erklärt. Die Summen mit Grad $< N$ gehören zu mehreren Vorzeichenfamilien.

Danach ist $V_M(s') \subset V_N(s)$, wenn $M < N$ gilt und s' durch Streichen aus s hervorgeht. Außerdem gilt die Abkürzung $V_N(+, +, + \dots +) = V_N^+$. Ebenso sei $V_N(-, - \dots -) = V_N^-$.

Daß diese Konvention sinnvoll ist, zeigt sich mit Satz 10. In der Topologie der kompakten Konvergenz im offenen Intervall ist $V_N(s)$ die abgeschlossene Hülle von $V_N^0(s)$. Zum Beweis schicken wir einen Hilfssatz voraus.

HILFSSATZ 4. Sei $\gamma_{M-1}^* \neq 0$. Dann gehört die Funktion

$$E(a^*, x) = \sum_{\mu=0}^{M-1} \gamma_{\mu}^* x^{\mu} e^{\lambda^* x} \tag{10.2}$$

genau dann zur abgeschlossenen Hülle von $V_M^0(s^*)$, wenn

$$s_n^* = (-1)^{M-n} \text{sign } \gamma_{M-1}^* \quad (n = 1, 2, \dots, M) \tag{10.3}$$

ist.

Beweis. In der Darstellung nach (9.5)

$$E(a^*, x) = \sum_{\mu} \beta_{\mu}^* \Delta^{\mu}(\lambda^*, \dots, \lambda^*) e^{\lambda x}$$

hat $\beta_{M-1}^* = \gamma_{M-1}^*/(M-1)!$ das gleiche Vorzeichen wie γ_{M-1}^* . Nach Satz 9 ist in jeder gegen $E[a^*]$ konvergenten Folge $E[a^{\rho}] \in V_M^0$ für hinreichend große ρ : $\text{sign } \beta_{M-1}^{\rho} = \text{sign } \beta_{M-1}^*$, und die Differenzen $\lambda_n^{\rho} - \lambda_m^{\rho}$ streben gegen 0. Unter Benutzung der Formel [8]

$$\Delta^{\nu-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu}) \varphi = \sum_{n=1}^{\nu} \varphi(\lambda_n) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\nu} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m}, \tag{10.4}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} E(a^{\rho}, x) &= \sum_{\nu=1}^M \beta_{\nu-1}^{\rho} \Delta^{\nu-1}(\lambda_1^{\rho}, \lambda_2^{\rho} \dots \lambda_{\nu}^{\rho}) e^{\lambda x} \\ &= \sum_{n=1}^M e^{\lambda_n^{\rho} x} \prod_{m \neq n} \frac{1}{\lambda_n^{\rho} - \lambda_m^{\rho}} \left\{ \beta_{M-1}^{\rho} + \sum_{\nu=n}^{M-1} \beta_{\nu-1}^{\rho} \prod_{m=\nu+1}^M (\lambda_n^{\rho} - \lambda_m^{\rho}) \right\}. \end{aligned}$$

Für $\rho \rightarrow \infty$ ist das Vorzeichen der Ausdrücke in der geschweiften Klammer allein durch β_{M-1}^{ρ} und damit durch $\text{sign } \gamma_{M-1}^*$ bestimmt. Außerdem ist

$$\text{sign } \prod_{m \neq n} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} = (-1)^{p_n} \tag{10.5}$$

mit $p_n = \text{Anzahl der Frequenzen } \lambda_m, \text{ die größer als } \lambda_n \text{ sind.}$

Wenn man die Summen in der Form $\sum \alpha_n^\rho e^{\lambda_n^\rho x}$ schreibt, sind deshalb die Faktoren α_n^ρ für hinreichend große ρ abwechselnd positiv und negativ, und der Term für die höchste Frequenz hat das gleiche Vorzeichen wie β_{M-1}^ρ bzw. γ_{M-1}^* . Für hinreichend große ρ liegt $E(a^\rho, x)$ in $V_N(s^*)$. Daraus folgt die Behauptung.

SATZ 10. *Bezüglich der Topologie der Konvergenz im Innern gilt*

- (a) $V_N(s)$ ist die abgeschlossene Hülle von $V_N^0(s)$.
 (b) In $V_N - V_{N-1}$ sind die Zusammenhangskomponenten durch

$$V_N(s) \cap (V_N - V_{N-1}) \quad (10.6)$$

gegeben, wobei s alle Vorzeichenkombinationen durchläuft.

Beweis. (a) Da die Aussage im folgenden nur in $V_N - V_{N-1}$ herangezogen wird, beschränken wir uns auf den wesentlich einfacheren Beweis, daß $V_N(s) \subset V_N^0(s) \cup V_{N-1}$, also der Abschluß von $V_N^0(s)$ in $V_N(s)$ enthalten ist.

Sei $E[a^*] \in V_N(s)$ mit $k^* = N$ so geschrieben, daß jeder Term $P_n^*(x) e^{\lambda_n^* x}$ für sich gemäß (9.5) dargestellt wird

$$E(a^*, x) = \sum_{n=1}^{l^*} \sum_{\gamma=0}^{M_n^*-1} \beta_{n\gamma}^* \zeta_\gamma(x, \lambda_n^*, \dots, \lambda_n^*). \quad (10.7)$$

Sei nun eine Folge in V_N^0 gegeben, die gegen $E[a^*]$ konvergiert. Nach Satz 9 strebt das Spektrum (d.h. die Menge aller Frequenzen) gegen das Spektrum von $E[a^*]$, und man kann in der Folge die Terme in derselben Gruppierung zusammenfassen wie bei der Grenzfunktion. Indem man den Hilfssatz 4 auf jeden der l^* Terme einzeln anwendet, erhält man die Behauptung.

(b) Die Teilmengen $V(s) = V_N(s) \cap (V_N - V_{N-1})$ bilden eine Zerlegung von $V_N - V_{N-1}$

$$\bigcup_s V(s) = V_N - V_{N-1},$$

$$V(s) \cap V(s') = \phi \quad \text{für } s \neq s'. \quad (10.8)$$

Es ist zu zeigen, daß diese eine Zerlegung in zusammenhängende, zugleich offene und abgeschlossene Teilmengen ist. Stellt man die Exponentialsummen aus

$$V_N^0(s) \cap (V_N - V_{N-1}) \quad (10.9)$$

in der Form (8.1) dar, ist die zugehörige Parametermenge konvex. Also sind die Mengen (10.9) zusammenhängend. Das gleiche gilt für die Mengen $V(s)$, die nach Satz 10 a die abgeschlossenen Hüllen der Mengen (10.9) sind.

Außerdem folgt aus (10.8)

$$V(s) = (V_N - V_{N-1}) - \bigcup_{s' \neq s} V(s')$$

Also sind die Mengen $V(s)$ nicht nur abgeschlossen, sondern auch offen.

Die beschränkten Teilmengen von $V_N(s)$ sind nach Satz 6 und Satz 10a kompakt. Daraus ergibt sich ebenso wie beim Nachweis einer Minimallösung bez. V_N das

KOROLLAR. Für jede Funktion $f \in C(X)$ existiert eine beste Tschebyscheff-Approximierende bez. $V_N(s)$.

11. LOKALE MINIMA

Bei einer Exponentialsumme $E[a]$ liegt ein lokales Minimum der Funktion $\Phi(a) = \|f - E[a]\|$ vor, wenn eine Umgebung von $E[a]$ keine bessere Approximation für die Funktion $f(x)$ enthält. Wir werden zeigen, daß es außer der Minimallösung noch mindestens ein lokales Minimum gibt, sofern die Minimallösung nicht in V_N^+ oder in V_N^- enthalten ist und die identisch verschwindende Funktion nicht beste Approximation bez. V_{N-1} ist.

Beim Beweis werden wir nachweisen, daß es in den betreffenden Fällen in wenigstens zwei verschiedenen Vorzeichenklassen $V_N(s)$ und $V_N(s')$ Funktionen gibt, die besser approximieren als alle Exponentialsummen aus V_{N-1} . Dann haben die Minimallösungen bez. $V_N(s)$ und $V_N(s')$ den Grad N , sind also nach Satz 10b voneinander verschieden. Offensichtlich sind sie auch lokale Minima für die Approximation in V_N .

HILFSSATZ 5. Sei \hat{E} mit Grad \hat{k} Minimallösung für $f \in C(X)$ bez. V_{N-1}^0 , aber nicht bez. V_N . Seien $\lambda_{\hat{k}+1}, \lambda_{\hat{k}+2}, \dots, \lambda_N$ beliebige reelle Zahlen, die nicht im Spektrum von \hat{E} enthalten sind. Dann gibt es in jeder Umgebung von \hat{E} eine Funktion $E_0 \in V_{\hat{k}}$ und Zahlen $\alpha_{\hat{k}+1}, \alpha_{\hat{k}+2}, \dots, \alpha_N$, so daß die Exponentialsumme

$$E(a_1, x) = E_0(x) + \sum_{n=\hat{k}+1}^N \alpha_n e^{\lambda_n x} \in V_N \tag{11.1}$$

eine bessere Approximation für f ist.

Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Alternantenkriteriums, das in Satz 1 enthalten ist. Die Familie

$$\left\{ \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{\lambda_n x} \text{ mit freien Parametern } \alpha_1 \cdots \alpha_N, \lambda_1 \cdots \lambda_{\hat{k}} \right\}$$

erfüllt die Haarsche Bedingung lokal. Da zu \hat{E} nur eine Alternante der Länge $N + \hat{k}$ gehört, ist \hat{E} nach Satz 12 in [3] nicht Minimallösung. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus dem Satz 8 in [3].

Wir untersuchen nun die Vorzeichenverteilungen der in dem Hilfssatz konstruierten Exponentialsummen.

SATZ 11. Sei $\hat{E} \in V_{\hat{k}}(s)$ Minimallösung für $f \in C(X)$ bez. V_{N-1}^0 , aber nicht bez. V_N . Die Fehlerkurve am Alternantenpunkt mit der größten Abszisse sei positiv (negativ). Ferner sei s ein Vorzeichenvektor mit N Komponenten, und es sei möglich, diesen aus \hat{s} durch Einschieben von $N - \hat{k}$ Komponenten zu erhalten. Dabei sei die neu eingeschobene Komponente mit dem größten Index positiv (negativ), und die anderen $N - \hat{k} - 1$ seien abwechselnd positiv und negativ. Dann enthält $V_N(s)$ eine bessere Approximation als V_{N-1} .

Beispiel. Die beste Approximation bez. V_6^0 sei in $V_4(++--)$ enthalten. Die Vorzeichenverteilung haben wir in Fig. 1a veranschaulicht, indem wir über den λ Achse die Vorzeichen aufgezeichnet haben. Der Satz sagt aus, daß in $V_7(++-+-+--)$ eine bessere Approximation existiert; denn durch Streichen der 1., 3. und 6. Linie in Fig. 1b entsteht die Konfiguration wie in Fig. 1a.

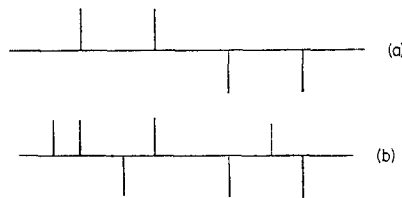


FIGURE 1

Beweis des Satzes. Bei der Konstruktion von besseren Approximationen nach Hilfssatz 5 kann man annehmen, daß sich die Koeffizienten in der Teilsumme E_0 nur wenig von denen in \hat{E} unterscheiden und so zwei Eigenschaften gelten.

- (1) E_0 und \hat{E} gehören zur gleichen Vorzeichenklasse von $V_{\hat{k}}$.
- (2) Eine Frequenz aus dem Spektrum von E_0 ist genau dann größer als eine zusätzliche Frequenz λ_n , wenn auch die entsprechende Frequenz aus dem Spektrum von \hat{E} größer als λ_n ist. Wir zeigen nun, daß dann in der besseren Approximation $E[a_1]$ für die zusätzlichen Terme in (11.1) die Relationen

$$\text{sign } \alpha_n = (-1)^{N+n} \quad \text{für } n \geq \hat{k} + 1 \quad (11.2)$$

gelten. Ordnet man in der Differenz $E(a_1, x) - \hat{E}(x)$ die Frequenzen der Größe nach, dann sind nach einem in [1] mehrfach benutzten Schluß (wegen $N + k - 1$ Nullstellen) die Faktoren abwechselnd positiv und negativ, und der Faktor zur größten Frequenz ist positiv. Die Beziehung (11.2) folgt deshalb unmittelbar für den Spezialfall, daß alle zusätzlichen Frequenzen λ_n größer sind als diejenigen von \hat{E} und E_0 . Ob in der Differenz $E[a_1] - \hat{E}$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Frequenzen größer als λ_n ist, hängt aber wegen der Eigenschaft (2) nicht von der Wahl der λ_n , sondern nur vom Index n ab. Damit gilt (11.2) allgemein.

Erfüllt der Vorzeichenvektor s die Voraussetzungen des Satzes, dann kann man Frequenzen $\lambda_{\hat{k}+1} \cdots \lambda_N$ so angeben, daß

$$\hat{E}(x) + \sum_{n=\hat{k}+1}^N \alpha_n e^{\lambda_n x} \in V_N(s) \tag{11.3}$$

gilt, falls (11.2) erfüllt ist. Aus dem ersten Teil des Beweises, folgt die Existenz einer besseren Approximation

$$E_0(x) + \sum_{n=\hat{k}+1}^N \alpha_n e^{\lambda_n x},$$

für die (11.2) erfüllt ist. Auf Grund der Bedingungen (1) und (2) liegt sie in der gleichen Klasse wie die in (11.3) genannte Funktion. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Existenz mehrerer lokaler Minima läßt sich nun für den Normalfall zeigen.

SATZ 12. *Die Minimallösung für $f \in C(X)$ bez. V_{N-1} sei eine eigentliche Exponentialsumme und verschwinde nicht identisch. Wenn die Minimallösung bez. V_N nicht in $V_{N-1} \cup V_N^+ \cup V_N^-$ enthalten ist, dann existieren mindestens zwei lokale Minima.*

Beweis. Wie am Anfang dieses Abschnitts vermerkt, ist zu zeigen, daß es mindestens zwei bessere Approximationen mit verschiedenen Vorzeichenverteilungen gibt. O.E.d.A. können wir annehmen, daß die Alternente zu $\hat{E} \in V_{N-1}^0$ positiv ist. Zwei Fälle werden unterschieden.

Fall 1. Es sei $\hat{k} < N - 1$. Wir konstruieren zwei verschiedene Vorzeichenverteilungen mit Hilfe von Satz 11. Erstens wählen wir $\lambda_{\hat{k}+1}$ gemäß $\lambda_1 < \hat{\lambda}_{\hat{k}+1} < \lambda_2 \cdots$. Also gibt es eine Teilmenge $V_N(s)$ mit $s_2 = (-1)^{N+\hat{k}+1}$ mit einer besseren Approximation. Als zweite Möglichkeit wählen wir $\hat{\lambda}_{\hat{k}+1} < \hat{\lambda}_{\hat{k}+2} < \lambda_1 < \cdots$. Also gibt es auch eine bessere Approximation in einer Teilmenge $V_N(s')$ mit $s_2' = (-1)^{N+\hat{k}+2}$.

Fall 2. Es sei $\hat{k} = N - 1$. Es ist $\hat{E} \notin V_{N-1}^+$; denn wegen der positiven Alternante hat die Minimallösung bez. V_N einen positiven Faktor mehr als \hat{E} und sie wäre sonst in V_N^+ enthalten, was wir ausgeschlossen haben. Also gibt es einen Index j mit $\hat{s}_j = -1$. Wählen wir $\lambda_N > \lambda_j$, so führt die Konstruktion nach Satz 10 zu $V_N(s)$ mit $s_j = \hat{s}_j = -1$. Andererseits führt die Wahl $\lambda_{j-1} < \lambda_N < \lambda_j$ nach Satz 11 zu $V_N(s')$ mit $s_j' = +1$.

Die Anzahl der verschiedenen Vorzeichenverteilungen, die man nach der im Beweis zu Satz 11 verwandten Konstruktion erhalten kann, läßt sich für $\hat{k} = N - 1$ genau angeben. Die Alternante sei positiv. Durch die Frequenzen von \hat{E} mit negativen Faktoren wird die reelle Zahlengerade in $k^-[\hat{a}] + 1$ Intervalle geteilt. Die Vorzeichenverteilung hängt nun davon ab, in welchem dieser Intervalle die Frequenz λ_N gewählt wird. Die Anzahl der verschiedenen Verteilungen beträgt also

$$\begin{aligned} 1 + k^-[\hat{a}] & \quad \text{bei positiver Alternante} \\ 1 + k^+[\hat{a}] & \quad \text{bei negativer Alternante} \end{aligned} \tag{11.4}$$

Für $\hat{k} < N - 1$ läßt sich die Zahl der Möglichkeiten nach unten abschätzen. Sie beträgt mindestens

$$1 + \max(k^+[\hat{a}], k^-[\hat{a}]).$$

Beispiel. Die beste Approximation bez. V_4 sei in $V_4(+--)$ enthalten (s. Fig. 2a) und die Alternante habe genau die Länge 9 und sei positiv. Dann gibt es lokale Minima in $V_5(++-)$, $V_5(+--+)$ und $V_5(+---)$, wie in den Fig. 2b-d deutlich wird.

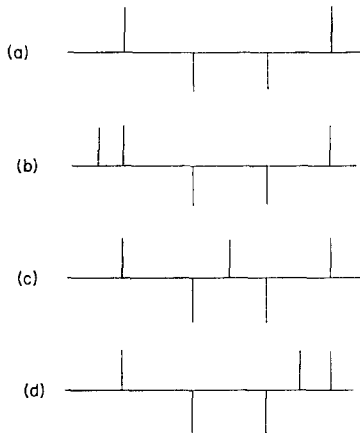


FIGURE 2

Die Existenz mehrerer lokaler Minima läßt sich ähnlich beweisen, wenn die Minimallösung bez. V_{N-1} eine uneigentliche Summe ist und die Alternante nur die Länge $N + l + 1$ hat. Wenn die Alternante mehr Punkte enthält, ist dies jedoch nur unter Einschränkungen richtig. Deshalb verzichten wir hier auf eine genaue Diskussion.

Diese Arbeit enthält den zweiten Teil meiner Habilitationsschrift, von der der erste Teil 1967 in *Computing* erschien. Die Abschnitte 9 und 10 werden auf Grund einer Idee von Professor Dr. Werner [7] neu gefaßt. Durch die Verwendung von Differenzenquotienten konnten die Beweise wesentlich verkürzt werden. Es ist mir eine Freude, Herrn Professor Dr. Werner für seine Anregungen zu danken.

LITERATUR

1. D. BRAESS, Approximation mit Exponentialsummen, *Computing* **2** (1967), 309–321.
2. G. KÖTHE, "Topologische lineare Räume," S. 19, Nr. (6). Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960.
3. G. MEINARDUS UND D. SCHWEDT, Nichtlineare Approximation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17** (1964), 297–326.
4. J. R. RICE, Chebyshev approximation by exponentials, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **10** (1962), 149–161.
5. E. SCHMIDT, "Normalität und Stetigkeit bei der Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen," Dissertation, Münster, 1968.
6. H. WERNER, Das Tschebyscheff-Problem in der Klasse der Exponentialfunktionen. Private Mitteilung, 1967.
7. H. WERNER, T -Approximation with Sums of Exponentials, Vortrag auf dem "Symposium on Approximation Theory" in Lancaster, 1969.
8. H. WERNER, "Praktische Mathematik II," Vorlesungsnachschrift, Münster, 1969.